## 1.2.5 Reálná čísla I

**Předpoklady:** 010204

Značíme $\mathbb{R}$.
Reálná čísla jsou čísla, kterými se vyjadřují délky úseček, čísla jim opačná a 0. $\Rightarrow$

- Každé reálné číslo je na číselné ose znázorněno právě jedním bodem.
- Každý bod číselné osy je obrazem právě jednoho reálného čísla.

Reálná čísla jsou čísla:

- racionální ($\mathbb{Q}$),
- **čísla iracionální** (např. $\sqrt{2},\pi$), která zaplnila mezery v číselné ose.

Iracionální čísla nelze zapsat zlomkem (ve tvaru $\frac{p}{q}$) $\Rightarrow$ lze je zapsat pouze **nekonečným neperiodickým rozvojem** ($\Rightarrow$ v reálném světě je přesně můžeme označovat pouze symbolem).

Přibližná hodnota čísla $\pi$:
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628
62089986280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081
2848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847
5648233786783165271201909145648566923460348610454326648213393607260249141
2737245870066063155881748815209209628292540917153643678925903600113305305488
2046652138414695194151160943305727036575959195309218611738193261179310511854
807446237996274956735188575272489122793818301194912983367336244065664308602
139494639522473719070217986094370277053921717629317675238467481846766940513
200056812714526356082778577134275778960917363717872146844090122495343014654
958537105079227968925892354201995611212902196086403441815981362977477130996
051870721134999999837297804995105973173281609631859502445945534690830264252
230825334468503526193118817101000313783875288658753320838142061717766914730
359825349042875546873115956286388235378759375195778185778053217122680661300
1927876611195909216420199
Je to jen prvních tisíc míst, zdá se to hodně, ale stále jsme na úplném začátku, protože jich zbývá napsat ještě nekonečně mnoho.

**Pedagogická poznámka:** Snažím se na tomto místě nepouštět do diskusí o nekonečnu. První taková je připravena v kapitole o množinách.

**Dodatek:** Aktuální rekord na počátku roku 2014 byl 12 100 000 000 050 desetinných míst. Na internetu je možné zdarma stáhnout program (Y-Cruncher), který vypočítá $\pi$ (i jiné matematické konstanty) s přesností na 50 miliónů míst na normálním počítači v několika minutách (tento program slouží i k rekordním výpočtům na podstatně silnějších počítačích za podstatně delší dobu).

**Pedagogická poznámka:** Přehled vlastností je stejný jako u racionálních čísel.

**Př. 1:** Rozhodni, které z vlastností určovaných u číselných operací (U, K, A, N, $^{-1}$) mají operace sčítání, odčítání, násobení a dělení v oboru reálných čísel. K jakým změnám oproti racionálním číslům došlo?

Sčítání: U, K, A, N(0), $^{-1}$.
Odčítání: U, N(0), $^{-1}$.
Násobení: U, K, A, N(1), $^{-1}$ - kromě nuly.
Dělení: U, N(1), $^{-1}$ - kromě nuly.
Žádné změny oproti racionálním číslům.

Reálná čísla mají všechny hezké vlastnosti racionálních čísel a v tuto chvíli splňují všechny naše požadavky.

**Dodatek:** Obor čísel iracionálních se nezavádí třeba také proto, že není uzavřený ani pro sčítání.

**Pravidla pro porovnávání reálných čísel:**

**Př. 2:** Doplň v pravidlech pro porovnávání reálných čísel nerovnosti napravo:
Pro každá tři reálná čísla *a*, *b*, *c* platí:
Jestliže: $a > b$ a zároveň $b > c$, pak $a \quad c$.
Jestliže: $a > b$ a zároveň $c > 0$, pak $ac \quad bc$.
Jestliže: $a > b$ a zároveň $c < 0$, pak $ac \quad bc$.
Jestliže: $a > b$ a *c* je libovolné reálné číslo, pak $a + c \quad b + c$.
Jestliže: $a > b$ a $c > d$, pak $a + b \quad c + d$.

Pro každá tři reálná čísla *a*, *b*, *c* platí:
Jestliže: $a > b$ a zároveň $b > c$, pak $a > c$.
Jestliže: $a > b$ a zároveň $c > 0$, pak $ac > bc$.
Jestliže: $a > b$ a zároveň $c < 0$, pak $ac < bc$.
Jestliže: $a > b$ a *c* je libovolné reálné číslo, pak $a + c > b + c$.

Jestliže: $a > b$ a $c > d$, pak pro součty $a + b \quad c + d$ nic nevyplývá. Může být větší jak součet $a + b$ (například pro $a = 10; b = 9; c = 8; d = 7$), tak součet $c + d$ (například pro $a = 2; b = 1; c = 8; d = 7$). Pokud máme získat pravidlo, musíme součty změnit na větu:
Jestliže: $a > b$ a $c > d$, pak pro součty $a + c > b + d$.

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad je ukázkou pravidel, která je sice asi nutné napsat, ale žáci je vcelku ignorují, protože jsou naprosto samozřejmá. V učebnici je často používáno řešení z předchozího příkladu, kdy dopracování pravidel je zadáno jako příklad, tak se žáci musí alespoň minimálně zamyslet.
Zejména na začátku je třeba dát pozor, aby si žáci do sešitu nepsali jenom výsledky, ale celé věty.

**Př. 3:** Porovnej $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ a $1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$:

Víme $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}>1$ a $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}>\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ podle posledního bodu předchozího příkladu $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}>1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

**Pedagogická poznámka:** Se zaokrouhlováním na daný řád nejsou žádné problémy. Proto jej neřešíme a staráme se spíše o formulaci postupu. Jednodušší příklady jsou v úvodu učebnice pro ZŠ.

**Př. 4:** Zakrouhli hodnotu čísla $\pi \doteq 3{,}14159265358979323846264338327950288841971693$ na: a) setiny b) tisíciny c) desetitisíciny d) bilióntiny (12 řádů za desetinou čárkou)

a) $\pi = 3{,}14$ - první vynechané číslo 1 $\Rightarrow$ ponechané číslice se nemění.
b) $\pi = 3{,}142$ - první vynechané číslo 5 $\Rightarrow$ k číslu $\pi = 3{,}141$ připočteme $0{,}001$.
c) $\pi = 3{,}1416$ - první vynechané číslo 9 $\Rightarrow$ k číslu $\pi = 3{,}1415$ připočteme $0{,}0001$.
d) $\pi = 3{,}141592653590$ - první vynechané číslo 7 $\Rightarrow$ k číslu $\pi = 3{,}141592653589$ připočteme $0{,}000000000001$.

Nula na konci v čísle $\pi = 3{,}141592653590$ je důležitá, říká nám, s jakou přesností číslo známe.

**Př. 5:** Zformuluj pravidlo pro zaokrouhlování na daný počet desetinných míst, tak aby podle něj mohl zaokrouhlovat i počítač.

Číslo zaokrouhlíme na místo daného řádu tak, že vynecháme všechny číslice napravo od něj a je-li první vynechaná číslice:
a) menší než 5, tak se všechny ponechané číslice nemění
b) větší nebo rovna 5, pak k číslu z ponechaných číslic připočteme jednotku jeho nejmenšího ponechaného řádu.

**Pedagogická poznámka:** První návrhy jsou typu „od pětky nahoru, do pětky dolů“ (v takovém případě číslo roztrhnu a napíšu kus nahoru nebo dolů), pak si žáci uvědomí, že musí přidat pokyn k vynechání číslic. Přičítání jednotky nejmenšího ponechaného řádu bývá často nesprávně nahrazováno zvětšením poslední číslice o jedničku. Je dobré nechat studenty najít protipříklad (devítka).
Příklad svádí k diskusi o tom, co vlastně dovedou počítače a co lidé a že není úplně jednoduché přetlumočit postupy jasné každému z lidí i počítači.

Někdy provádíme zaokrouhlování na platné cifry.
**Mezi platné cifry se počítají všechny cifry zaokrouhleného čísla kromě nul, které stojí před první nenulovou číslicí a nul na konci čísla, které vznikly zaokrouhlením.**
Například:

- 23114 (na 2 platná místa) $\doteq 23000$,
- 23,41(na 2 platná místa) $\doteq 23$,
- 7683,799(na 6 platných míst) $\doteq 7683{,}80 \Rightarrow$ 0 musí být na konci, abychom věděli, že číslo je zaokrouhlené na 6 platných míst.

**Př. 6:** Urči počet platných míst v číslech:
a) $0,15$ b) $0,015$ c) $0,00150$ d) $15,000$

a) $0,15$: dvě platné cifry.

b) $0,015$: dvě platné cifry.

c) $0,00150$: tři platné cifry (dvě platné cifry by mělo číslo 0,0015).

d) $15,000$: pět platných číslic (dvě platné cifry by mělo číslo 15, tři číslo 15,0).

**Př. 7:** Zaokrouhli na tři platné cifry čísla:
6764; 321,5; 0,004588; 100456; 0,04997

$6764 \doteq 6760$ zaokrouhluji číslo 4, tedy dolů.
$321,5 \doteq 322$ zaokrouhluji podle 5, tedy nahoru.
$0,004588 \doteq 0,00459$ první platná číslice je 4, zaokrouhluji tedy podle 8.
$100456 \doteq 100000$ nuly za jedničkou jsou platné číslice $\Rightarrow$ zaokrouhluji podle 4 dolů.
$0,04997 \doteq 0,0500$ první platná číslice je 4, zaokrouhluji podle 7, vzniklé nuly jsou platné, vypovídají o přesnosti.

**Př. 8:** Urči všechna celá čísla, která po zaokrouhlení na 1 platnou číslici dají číslo 20000.

Zaokrouhlujeme na jednu platnou číslici $\Rightarrow$ zaokrouhlujeme podle druhé číslice (řád tisíců)

- Hledáme nejmenší číslo: Musíme tisíce zaokrouhlit nahoru, nejmenší taková číslice je 5 $\Rightarrow$ 15000 (za 5 může být cokoliv, nejmenší jsou samé nuly).
- Hledáme největší číslo: Musíme tisíce zaokrouhlit dolů, největší taková číslice je 4 $\Rightarrow$ 24999 (za 4 může být cokoliv, největší jsou samé devítky).

$\Rightarrow$ Při zaokrouhlení na 1 platnou číslici získáme číslo 20000 z čísel 15000, 24999 a všech čísel mezi nimi.

**Pedagogická poznámka:** Slovní vyjádření řešení v předchozím příkladu není zrovna matematické, ale v tomto okamžiku je žákům srozumitelnější než elegantnější: čísla větší než 14999 a zároveň menší než 25000. Ze stejného důvodu je podobný způsob využit i v následujícím příkladu. Elegantnější vyjádření je vhodné zmínit, ale nenutit ho těm, kteří příklad jen tak-tak chápou.

**Př. 9:** Urči všechna celá čísla, která po zaokrouhlení na 2 platné číslice dají číslo 20000.

Zaokrouhlujeme na dvě platné číslice $\Rightarrow$ zaokrouhlujeme podle třetí číslice (řád stovek).

- Hledáme nejmenší číslo: Musíme stovky zaokrouhlit nahoru, nejmenší taková číslice je 5, před ní musí být 19, aby po přičtení jedničky vyšlo20 $\Rightarrow$ 19500 (za 5 může být cokoliv, nejmenší jsou samé nuly).
- Hledáme největší číslo: Musíme stovky zaokrouhlit dolů, největší taková číslice je 4 $\Rightarrow$ 20499 (za 4 může být cokoliv, největší jsou samé devítky).

$\Rightarrow$ Při zaokrouhlení na 2 platné číslice získáme číslo 20000 z čísel 19500, 20499 a všech čísel mezi nimi.

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklady jsou důležité zejména pro pochopení významu, které mají nuly psané za desetinnou čárkou pro určení přesnosti výsledku, zejména ve fyzice.

**Dodatek:** Zaokrouhlování a platné číslice jsou zdrojem častých nedorozumění, obsah této hodiny není vyčerpávající a důrazně doporučuji projít i hodinu následující.

**Př. 10:** Ze zaokrouhleného čísla nemusí být vždy jasné, kolik má platných cifer. Najdi příklad takového čísla. Navrhni (nebo najdi) řešení tohoto problému.

**Pedagogická poznámka:** Řešení příkladu není uvedeno schválně, je obsaženo až v příští hodině, aby žáci měli možnost samostatného přemýšlení. Platí mezi námi domluva, že mohou využívat celý internet s výjimkou učebnice na realisticky.cz (řešení problému je částí následující hodiny, která využívá samostatnou práci na internetu). Pro jistotu však následující hodinu předem stáhnu, při práci v hodině stránky www.realisticky.cz blokujeme. Takovou možnost samozřejmě nemáte, ale pokud se bojíte, že si žáci všechno přečtou dopředu (a chcete s nimi na internetu pracovat) zadejte úkol až v příští hodině.

**Shrnutí:** Při zaokrouhlování je nutné dát pozor na nuly. I nuly mohou být platnými číslicemi.